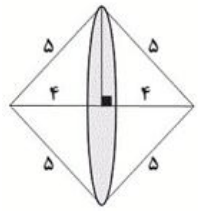
سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

حجم حاصل دو تا مخروط در قاعده مشترک است. شعاع قاعده مخروط‌ها برابر با ارتفاع مثلث: $r = \sqrt{۵^۲ - ۴^۲} = ۳$ و ارتفاع هر کدام ۴ است. پس داریم:

$$V = ۲ \times \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۴ = ۲۴\pi$$



سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر قاعده مثلث را برابر فاصله کانون‌های بیضی در نظر بگیریم، داریم:

$۲c = ۶ \Rightarrow c = ۳$

$\text{محیط} = MB + MC + \underbrace{BC}_{۶} = ۱۶ \Rightarrow MB + MC = ۱۰$

اگر B و C را F و F′ در نظر بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} MF + MF' = ۱۰ \\ MF + MF' = ۲a \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۵$$

در بیضی: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۹ \Rightarrow b = ۴$

چون قاعده ثابت است پس مساحت هنگامی ماکزیمم می‌شود که ارتفاع max باشد و ارتفاع max هنگامی است که برابر b باشد.

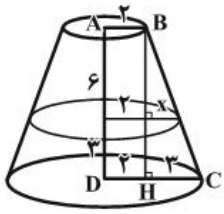
$$S = \frac{(۲c)\times b}{۲} = b \times c = ۱۲$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

از دوران ذوزنقه قائم‌الزاویه حول ارتفاع، یک مخروط ناقص به‌وجود می‌آید.

سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه‌ای موازی با قاعده‌های ذوزنقه قائم‌الزاویه با این مخروط ناقص، یک دایره است.



طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث BHC داریم:

$$\frac{x}{۳} = \frac{۶}{۹} \Rightarrow ۹x = ۱۸ \Rightarrow x = ۲$$

بنابراین مطابق شکل، شعاع دایره مورد نظر برابر۴ است و در نتیجه مساحت سطح مقطع برابر است با: $S = \pi(۴)^۲ = ۱۶\pi$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

شکل حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۷ و ارتفاع ۴ واحد می‌باشد که درون آن استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳ واحد و با همین ارتفاع خالی شده است. پس حجم شکل حاصل برابر است با:

$$V = \pi \times (۷)^۲ \times (۴) - \pi \times (۳)^۲ \times (۴) = ۴\pi(۴۹ - ۹) = ۱۶۰\pi$$

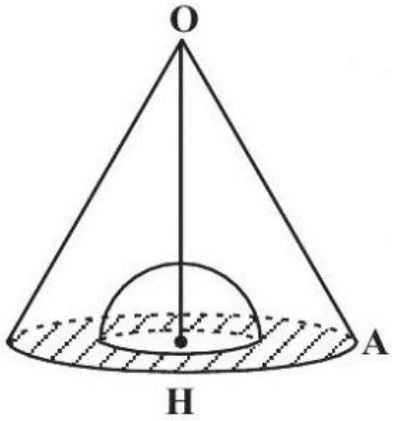
سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

شکل حاصل یک مخروط می‌باشد که درون آن به اندازه‌ی یک نیم‌کره، خالی شده است.

$OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OA \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶ = ۳\sqrt{۳}$

$V_{\text{حاصل}} = V_{\text{مخروط}} - V_{\text{نیم کره}}$



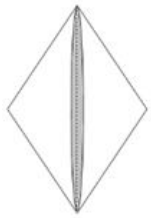
$V_{\text{حاصل}} = \frac{۱}{۳}(\pi R^{۲} h) - \frac{۲}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۱}{۳}(\pi \times (۳)^{۲} \times ۳\sqrt{۳}) - \frac{۲}{۳}\pi \times ۱^{۳}$

$= ۹\sqrt{۳}\pi - \frac{۲}{۳}\pi$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

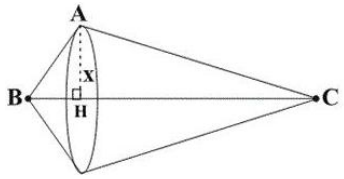
اگر مثلث متساوی‌الساقین را حول قاعده‌ی آن دوران دهیم، در این صورت دو مخروط با قاعده‌ی یکسان حاصل می‌شود که شعاع قاعده‌ی آن برابر ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث است که در شکل زیر مشاهده می‌کنید.



سوال ۷

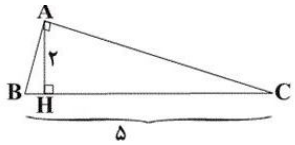
پاسخ: گزینه ۳

شکل حاصل، دو مخروط مشترک در قاعده است. شعاع قاعده مخروط‌ها برابر X و مجموع ارتفاع‌های آنها BC=۵ است و داریم:



$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^{۲}(BH) + \frac{۱}{۳}\pi x^{۲}(CH) = \frac{۱}{۳}\pi x^{۲}(BC)$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi x^{۲}(۵) = \frac{۵}{۳}\pi x^{۲} = \frac{۲۰\pi}{۳} \Rightarrow x^{۲} = ۴ \Rightarrow x = ۲$$



حال با استفاده از روابط مثلث قائم‌الزاویه داریم:

الف) $AB.AC = BC.AH = ۱۰$

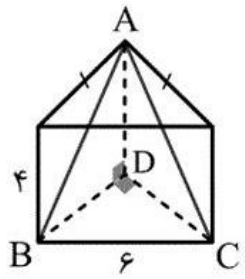
ب) $AB^{۲} + AC^{۲} = BC^{۲} \Rightarrow (AB + AC)^{۲} - ۲\underbrace{AB.AC}_{۱۰} = ۲۵$

$$\Rightarrow (AB + AC)^{۲} = ۴۵ \Rightarrow AB + AC = ۳\sqrt{۵}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

از آنجا که مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به طول وتر ۶ است، داریم:



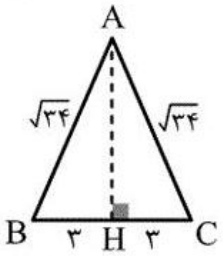
$BD^{۲} + CD^{۲} = BC^{۲} \Rightarrow x^{۲} + x^{۲} = ۳۶$

$\Rightarrow x^{۲} = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲}$

در مثلث ABD بنا به قضیه فیثاغورس داریم:

$AB^{۲} = AD^{۲} + BD^{۲} \Rightarrow AB^{۲} = ۱۶ + ۱۸ = ۳۴$
$\Rightarrow AB = \sqrt{۳۴}$

برای پیدا کردن مساحت مثلث ABC ، طول ارتفاع وارد بر BC را حساب می‌کنیم.



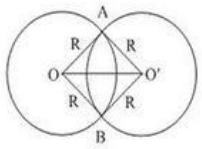
$\overset{\triangle}{ABH} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} AH = \sqrt{AB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{۳۴ - ۹} = ۵$

بنابراین:

$S(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۶ = ۱۵$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱



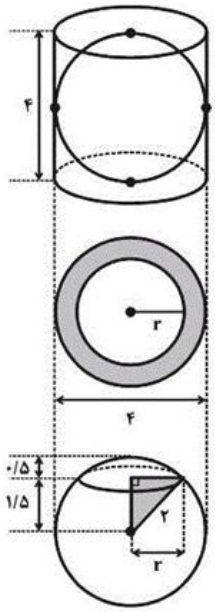
مطابق شکل سطح مقطع حاصل از برخورد این دو کره، دایره‌ای به قطر AB است. طول اضلاع چهارضلعی OAO'B برابر و طول قطر OO' در این چهارضلعی $\sqrt{۲}$ برابر طول هر ضلع (شعاع هر کره) است، پس طبق عکس قضیه فیثاغورس در مثلث‌های OAO' و OBO'، هر یک از زوایای A و B قائمه هستند و در نتیجه این چهارضلعی مربع است. در این صورت $AB = OO' = R\sqrt{۲}$ است و در نتیجه داریم:

$$\frac{\text{مساحت دایره}}{\text{مساحت کره}} = \frac{\pi(\frac{R\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۴\pi R^۲} = \frac{\frac{\pi R^۲}{۲}}{۴\pi R^۲} = \frac{۱}{۸}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به توضیحات سؤال، شکل مقابل را می‌توانیم در نظر بگیریم، اگر مقطع حاصل را برابر با S در نظر بگیریم، داریم:



$$S = \pi(۲)^۲ - \pi(r)^۲ = (۲^۲ - r^۲)\pi \quad (*)$$

برای محاسبه r با استفاده از شکل فوق داریم:

$$(۱/۵)^۲ + r^۲ = ۲^۲ \Rightarrow ۲^۲ - r^۲ = (۱/۵)^۲$$

$$\xrightarrow{(*)} S = (۱/۵)^۲\pi = ۲/۲۵\pi$$